



**زیربرنامه:**

TimSTP\_Laminar

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **توسعه دهندگان** | مرتضی نامور |  |
| **تهیه کنندگان مستند** | مرتضی نامور | |
| **تاییدکنندگان** |  | |
| **تاریخ تنظیم سند** | 22 / 02 /94 | |
| **شناسه سند** | **MC2F005F1** | |
| **زبان برنامه‌نویسی** | **Fortran 90** | |

# وظایف

در این زیربرنامه گام زمانی هر کدام از سلول های شبکه برای یک جریان آرام و روش گسسته سازی صریح بخش زمانی معادلات حاکم بر جریان سیال محاسبه می گردد.

# توضیحات و تئوری­ها

عدد کورانت نشان می­دهد که در یک گام زمانی چقدر از اطلاعات بصورت عرضی از سلول عبور می­کند در نتیجه طبق تعریف در روش اویلر صریح عدد کورانت نباید بیشتر از یک باشد چون در یک گام زمانی اطلاعات بیشتر از یک سلول را می­پیماید و جواب به درستی بدست نمی­آید. شرط CFL نیز بزرگترین عدد کورانت ممکن برای روش عددی موجود می­باشد که در سال 1928 توسط کورانت، فردریش و لوئی معرفی شد. طبق تعریف و با توجه به معادلات ناویر استوکس عدد کورانت برای حالت یک بعدی به صورت زیر تعریف می­شود [1]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

اگر حالت دو بعدی را در نظر بگیریم چون در یک گام زمانی اطلاعات در جهت x و y گسترش می­یابد و با توجه به معادله­ی ناویر استوکس دو بعدی عدد کورانت به صورت زیر تعریف می­گردد [1]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در حالت کلی عدد کورانت برای جریان چند بعدی به صورت زیر تعریف می­شود [1]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در جریان مغشوش سرعت را می‌توان با استفاده از مقادیر متوسط رینولدز به شکل زیر نوشت [2]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

سپس معادلات ناویر استوکس به شکل متوسط گیری شده نوشته می‌شود. به این ترتیب با استفاده از مقدار سرعت به شکل بالا می‌توان عدد کورانت را برای جریان مغشوش محاسبه کرد. به طریق مشابه مولفه‌های مختلف سرعت در جریان مغشوش چند بعدی نیز تعریف می­شوند و با استفاده از آن عدد کورانت در جریان مغشوش چند بعدی محاسبه می‌شود.

همانطور که از رابطه­ی عدد کورانت مشخص می­باشد چون این عدد وابسته به سرعت محلی است عدد کورانت وابسته به فیزیک مسئله می­باشد. برای مثال در گسسته­سازی مرکزی ناحیه فیزیکی و ناحیه عددی برای گره­های مختلف در زمان به شکل زیر می‌باشد:



1. پایداری در روش­های مرکزی

همانطور که در ‏شکل (1) مشخص می­باشد عدد کورانت باید به گونه­ای انتخاب شود که در هیچ گره­ای شرط CFL نقض نشود و چون در هر گره عدد کورانت وابسته به سرعت متوسط در آن گره می­باشد بنابراین در هر روش، گام زمانی و عدد کورانت باید با توجه به فیزیک مسئله انتخاب شود که در همه­ی گره­ها پایداری داشته ­باشیم.

با توجه به مباحث انجام گرفته یکی از مهم­ترین مراحل حل عددی معادلات ناویر استوکس به روش صریح، انتخاب، گام زمانی مناسب می­باشد. برای انتخاب گام زمانی باید دقت مورد نیاز و هزینه­ی محاسباتی را در نظر بگیریم چون هرچه گام زمانی کوچکتر باشد جواب دقیق­تر و پایدارتر می­باشد ولی در عوض زمان و هزینه­ی محاسبات به شدت بالا می­رود. بنابراین گام زمانی باید به­گونه­ای انتخاب شود که تعادل مناسبی را بین این دو مورد اعمال کند. برای انتخاب گام زمانی مناسب از عدد کورانت و شرط CFL استفاده می­شود. انتخاب گام زمانی به دو شکل می­باشد:

## گام زمانی ثابت

در این حالت بزرگترین سرعت موجود در سیستم برای انتخاب گام زمانی استفاده می­شود. برای مثال جریان روی یک حفره باز به طول 76 میلیمتر را در نظر بگیرید که آن را به 100 قسمت تقسیم می­کنیم، اگر سرعت جریان آزاد  باشد برای انتخاب گام زمانی مناسب با روش اویلر بیشترین عدد کورانت یعنی 1 را در نظر می­گیریم. در نتیجه چون بیشترین سرعت ممکن برای این حالت سرعت جریان آزاد می­باشد گام زمانی به صورت زیر بدست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با استفاده از این روش کوچکترین گام زمانی مورد نیاز در کل حل برای تمام مراحل انتخاب می­گردد. در صورتی که ممکن است در بعضی از مراحل با گام زمانی بزرگتر نیز حل پایدار ­باشد. برای رفع این مشکل می­توان از گام زمانی متغیر استفاده کرد.

## گام زمانی متغیر

در این حالت در هر زمان برای محاسبه­ی گام زمانی، بزرگترین سرعت موجود در شبکه محاسبه می­شود و براساس این سرعت، گام زمانی برای مرحله­ی بعدی انتخاب می­شود یعنی گام زمانی به صورت زیر بدست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  | , |

در نتیجه طبق این روش در هر زمان می­توان گام زمانی مناسب را انتخاب کرد. حتی می­توان برای هر گره یک گام زمانی متفاوت انتخاب کرد که در این حالت در هر گره گام زمانی به صورت زیر بدست:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

به این ترتیب با اعمال گام زمانی متغیر علاوه بر بدست آمدن پایداری و دقت مناسب هزینه و زمان عملیات محاسباتی نیز کاهش می­یابد چون در هر گره گام مناسب انتخاب شده است.

## گام ‌زمانی موضعی و افزایش سرعت همگرایی

برای بدست آوردن حل جریان‌های دائم با استفاده از الگوریتم‌های صریح می‌توان از گام زمانی موضعی استفاده کرد که سرعت همگرایی را به شدت افزایش می‌دهد ولی برای شبیه‌سازی غیر دائم استفاده از آن امکان‌پذیر نمی‌باشد. در این روش همانطور که در بالا گفته شد گام زمانی در هر سلول محاسباتی براساس شرط پایداری محلی محاسبه می‌شود و گام زمانی در هر سلول متفاوت است. با توجه به اینکه برای محاسبه گام زمانی هر سلول از اندازه‌ی آن استفاده می‌شود و اندازه‌ی سلول‌ها در دامنه حل متفاوت است، هریک از سلول‌ها با گام‌های متفاوتی به سمت حالت دائم پیش‌ می‌روند. یعنی سلول‌های بزرگتر که از سطح بیشتری برخوردار هستند دیرتر به حالت پایا می‌رسند که این سلول‌ها در گام زمانی موضعی دارای گام زمانی بزرگتری هستند و در نتیجه میدان حل سریعتر به حالت دائم همگرا می‌شود. اما استفاده از گام زمانی موضعی مقداری دقت زمانی کاهش می‌یابد [3] چون هر سلول یک گام زمانی متفاوت دارد در صورتی که در محاسبه‌ی شارها از مقادیر موجود در دو سلول همسایه که در زمان‌های مختلف می‌باشند استفاده می‌شود. اما از آنجا که سلول‌های همسایه اندازه‌های نزدیک به هم دارند گام زمانی آن‌ها تفاوت زیادی ندارد و در ابتدا که تغییرات زیاد است زمان سلول‌ها نزدیک به هم است. با پیشروی فرایند حل زمان سلول‌ها تفاوت بیشتری پیدا می‌کند اما در این زمان‌ها به جواب پایا نزدیک می‌شویم که تغییرات در سلول‌ها نسبت به زمان‌های قبل کم است یعنی در این اختلاف زمانی چون به حل پایا نزدیک هستیم خطای زیادی ایجاد نمی‌شود.

## تعیین گام زمانی موضعی

برای بررسی دقیق‌تر تعیین گام زمانی به شکل موضعی، معادله‌ی ناویر استوکس را برای یک محیط دو بعدی در حالت کلی به شکل زیر در نظر می‌گیریم [4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن



به این ترتیب کل معادله به دو قسمت بخش‌های جابه‌جایی  و بخش‌های پخش ناشی از ویسکوزیته  تقسیم می‌شود. محدودیت پایداری باید برای هر دو قسمت جابه‌جایی و پخش معادله‌ی ناویر استوکس اعمال شود. به این ترتیب دو محدودیت  و  به عنوان محدودیت گام زمانی جابه‌جایی و محدودیت گام زمانی ویسکوز به شکل زیر ایجاد می‌گردد [3]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

که در آن  بزرگترین مقدار ویژه‌ی معادله‌ی ناویر استوکس غیر ویسکوز میانگین گرفته در اطراف مرز حجم کنترل،  بزرگترین مقدار ویژه‌ی قسمت پخشی معادله‌ی ناویر استوکس است که در اطراف مرز حجم کنترل میانگین‌گیری می‌شود،  ضریبی‌ است که اهمیت محدودیت گام زمانی ویسکوز را نسبت به محدودیت گام زمانی غیر ویسکوز نشان می‌دهد که معمولاً حدود 25/0 انتخاب می‌شود و  مساحت حجم کنترل می‌باشد. در نتیجه گام زمانی نهایی به شکل زیر بدست می‌آید [3]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

برای تعیین گام زمانی معادله‌ی ‏(2) را در یک دستگاه مختصات عمومی  می‌نویسیم [4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که علامت *Hat* درمعادلات بالا نشان‌دهنده‌ی متغیرها در دستگاه مختصات جدید می‌باشد. در واقع متغیرها براساس تغییر مختصات از دستگاه کارتزین  به  ایجاد شده‌اند که این تغییر دستگاه به شکل زیر می‌باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن  ژاکوبین می‌باشد و وارون آن به شکل زیر محاسبه می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در نتیجه متغیرهای جدید به شکل زیر بدست می‌آیند [4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در روابط بالا ماتریس  به شکل زیر بدست می‌آید [4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

در روابط بالا اپراتور گرادیان و  دلتای کرونیکر می‌باشد. با جایگذاری متغیرها در معادله‌ی ‏(6)، معادله‌ی ناویر استوکس به شکل زیر بدست می‌آید [4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن







به این ترتیب اگر c سرعت صوت باشد، مقادیر ویژه‌ی ماتریس  به صورت زیر بدست می‌آید [4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

همچنین مقادیر ویژه‌ی ماتریس  هم عبارتند از [4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

همچنین از مقادیر ویژه‌ی ماتریس  صرفنظر می‌شود. در نتیجه بزرگترین مقدار ویژه‌ی قسمت غیرویسکوز معادله‌ی ناویر استوکس به کمک مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های  و  به شکل زیر بدست می‌آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

سپس با صرفنظر کردن از  بزرگترین مقدار ویژه‌ی قسمت ویسکوز معادله‌ی ناویر استوکس به کمک مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های و به شکل زیر بدست می‌آید [3]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

به این ترتیب مقدار  به فرم زیر بدست می‌آید [3]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن  است. با مشخص شدن  و  محدویت گام زمانی  و  بدست می‌آیند و در نهایت گام زمانی  با در نظر گرفتن عدد کورانت دلخواه طبق رابطه‌ی ‏(5) محاسبه می‌شود

بنابراین بصورت خلاصه می توان گفت که مقدار گام زمانی بدلیل ذات روش صریح دارای محدودیت می باشد. برای مسائل یک بعدی مقدار گام زمانی هر کدام از سلول ها بصورت دقیق قابل محاسبه می باشد اما برای مسائل دو و سه بعدی گام زمانی در قیاس با مسئله یک بعدی بدست می آید. بنابراين گام زماني هر کدام از سلول ها بصورت زير تعیین می گردد ]5[:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

در روابط بالا *Nx* و *Ny* مولفه های بردار عمود بر اضلاع و *L* طول ضلع می باشد. همچنین ضریبی است که مقدار آن بین 0.25-0.15 در نظرگرفته می شود. با توجه به وارد شدن ابعاد سلول محاسباتی در تعیین مقدار گام زمانی در ناحيه اي كه اندازة سلول ها بدليل فشردگي بيشتر آنها در نزديك مرز دیوار، داراي تغييرات زيادي است و همچنین سلول هاي بزرگتر كه از سطح بيشتري برخوردار هستند با گام های زماني متفاوتی به سمت حالت دائم پيشرفتهو باعث همگرايي سريعتر ميدان به حالت دائم مي شوند (سلول های بزرگتر دارای گام زمانی بزرگتری هستند). بنابراین گام زمانی هر کدام از سلول های شبکه بر طبق روابط زیر محاسبه می گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

در رابطه بالا گام زمانی یک سلول،عدد کورانت، *Ai* مساحت سلول، **مولفه های سرعت در میانه هر کدام از اضلاع سلول،مولفه های بردار عمود بر هر کدام از اضلاع سلول در جهت محورهای مختصات،سرعت صوت در میانه هر کدام از اضلاع سلول می باشد. همچنین مقدار  برابر 0.15 در نظر گرفته شده است. مقادیر سرعت، سرعت صوت و لزجت مولکولی با استفاده از روابط زیر محاسبه می گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در اینجا باید توجه کرد که برای اضلاعی که بر روی مرز دیوار قرار دارند، مقادیر روابط ‏(24) بدون میانگین گیری و با استفاده از مقدار سلول مرزی محاسبه می شود. همچنین برای اضلاعی که بر روی مرز دوردست قرار دارند، گام زمانی با استفاده از مقادیر بدست آمده از شرایط مرزی بدست می آید.

بنابر آنچه گفته شد محاسبه گام زمانی برای سلول هایی که بر روی مرز دیوار و دوردست قرار دارند و همچنین سلول های غیر مرزی با یکدیگر متفاوت است. بنابراین جهت پرهیز از استفاده از دستورهای شرطی و در نتیجه صرفه جویی در زمان محاسبات، با توجه به نوع اضلاع، محاسبات در حلقه های جداگانه ای انجام می شود. برای این منظور اضلاعی که بر روی مرز دیوار، دوردست و غیرمرزی می باشند در حلقه های جداگانه ای مقدار رابطه بالا برای آنها محاسبه می شود. در ادامه بطور اختصاری منظور از محاسبه گام زمانی، محاسبه مخرج روابط مربوط به گام زمانیست و در انتهای زیربرنامه مقدار گام زمانی هر کدام از سلول های شبکه محاسبه می گردد.

جهت صرفه جویی در محاسبات ابتدا مقادیر مربوط به مخرج روابط‏(22) و ‏(23) یعنی روابط ‏(25) و ‏(26) برای هر کدام از اضلاع محاسبه می گردد و در انتها مقادیر گام زمانی برای سلول ها محاسبه می شود.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

در ادامه بطور اختصاری منظور از گام زمانی لزج و غیر لزج روابط ‏(25) و ‏(26) می باشد. این نامگذاری تنها تا مرحله 22 که گام زمانی از روابط ‏(22) و ‏(23) محاسبه می گردد، صادق خواهد بود.

# بخش­های زیربرنامه

در این قسمت تمام بخش های زیربرنامه مطابق با شماره گذاری موجود در برنامه کامپیوتری ارائه شده است.

1. مقداردهی اولیه به گام زمانی لزج و غیرلزج هر کدام از سلول ها

از آنجا که گام زمانی بصورت تلفیقی از مقادیر مربوط به متغیرهای لزج و غیرلزج تعیین می گردد، بنابراین دو آرایه برای اینکار در نظر گرفته شده است. به دلیل اینکه محاسبات مربوط به گام زمانی هر سلول بر روی اضلاع آن انجام می شود و این مقادیر به آرایه مربوط به هر سلول اضافه می گردد، بنابراین با یک پروسه اضافه کردن مقادیر به مقادیر قبلی مواجه هستیم. به این دلیل باید آرایه های مربوط به اینکار در ابتدای زیربرنامه برابر صفر قرار داده شود.

1. انجام محاسبات مربوط به اضلاع مرزی

در یک حلقه تکرار تمام اضلاع مرزی دیوار بررسی شده و مقادیر روابط‏(25) و ‏(26) برای آنها محاسبه و به مقدار سلول متناظر آن اضافه می گردد.

1. ذخیره اطلاعات ضلع مورد بررسی در پارمترهای محلی

سلول اصلی ضلع مورد بررسی در یک پارامتر محلی ذخیره می گردد. در اینجا چون سلول همسایه هر کدام از اضلاع مربوط به مرز دیوار برابر صفر است، تنها شماره سلول اصلی ذخیره می گردد.

1. محاسبه مقدار سرعت در میانه ضلع

مقدار مولفه های سرعت در جهت محورهای مختصات با استفاده از مقادیر بقایی بدست آمده از شرایط مرزی، محاسبه شده و در پارامترهای محلی ذخیره می گردد.

1. محاسبه سرعت صوت در میانه ضلع

سرعت صوت با استفاده از رابطه ‏(27) محاسبه می گردد. توجه شود که در اینجا از مقادیر محاسبه شده برای اضلاع مرزی استفاده می شود. با توجه به اینکه ممکن است مقدار فشار منفی شود، در اینجا از مقدار بدون علامت توان دوم سرعت صوت استفاده شده است.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. محاسبه گام زمانی لزج و غیرلزج

مقدار گام زمانی لزج و غیرلزج با استفاده از روابط‏(25) و ‏(26) محاسبه شده و به مقدار سلول اصلی ضلع مورد بررسی اضافه می گردد.

1. انجام محاسبات مربوط به اضلاع غیر مرزی

در یک حلقه تکرار تمام اضلاع غیر مرزی بررسی شده و مقدار روابط ‏(25) و ‏‏(26) برای آنها محاسبه و به مقدار سلول اصلی و همسایه آن اضافه می گردد.

1. ذخیره اطلاعات ضلع مورد بررسی در پارمترهای محلی

دو سلول متناظر با ضلع مورد بررسی در پارامترهای محلی ذخیره می گردد.

1. محاسبه مقدار سرعت در میانه ضلع

مقدار مولفه های سرعت در جهت محورهای مختصات با استفاده از میانگین گیری از مقادیر بقایی دو سلول مجاور ضلع مورد بررسی محاسبه شده و در پارامترهای محلی ذخیره می گردد.

1. محاسبه سرعت صوت در میانه ضلع

سرعت صوت با استفاده از روابط ‏(24) محاسبه می گردد. در اینجا مقدار فشار و چگالی با استفاده از یک متوسط گیری از سلول های مجاور ضلع مورد بررسی محاسبه می گردد.

1. محاسبه گام زمانی غیرلزج

گام زمانی غیرلزج با استفاده از رابطه ‏(25) محاسبه و در یک پارامتر محلی ذخیره می گردد.

1. اضافه کردن مقدارگام زمانی غیرلزج به سلول های مجاور ضلع مورد بررسی

مقدارگام زمانی غیرلزج به مقدار دو سلول همسایه و اصلی ضلع مورد بررسی اضافه می گردد.

1. محاسبه گام زمانی لزج

گام زمانی لزج با استفاده از رابطه ‏(25) محاسبه و در یک پارامتر محلی ذخیره می گردد.

1. اضافه کردن مقدارگام زمانی لزج به سلول های مجاور ضلع مورد بررسی

مقدارگام زمانی لزج به مقدار دو سلول همسایه و اصلی ضلع مورد بررسی اضافه می گردد.

1. محاسبه گام زمانی سلول های شبکه

در اینجا ابتدا مقدار گام زمانی لزج و غیرلزج هر کدام از سلول های شبکه محاسباتی بترتیب با استفاده از روابط ‏(22) و ‏(23) محاسبه شده و در انتها مقدار گام زمانی با بکارگیری رابطه ‏(21) تعیین می شود

# مراجع

[1] <https://en.wikipedia.org/wiki/Courant-Friedrichs-Lewy-condition>

[2] “Simulation of turbulent flow”, Open Course Stanford University

[3] Mavriplis, D.J., Jameson, A., “Multigrid solution of the Navier-Stokes equations on triangular meshes”, AIAA Paper Vol. 28 No. 8, August 1990

[4] Swanson, R.C., Turkel, E., “Multistage schemes with multigrid for Euler and Navier-Stokes equations”, NASA Technical Paper 3631, August 1997

[5] A. Jameson and L. Martinelli, “Multigrid Solution of the Navier-Stokes Equations on Triangular Meshes”, 27th Aerospace Sciences Meeting January 9-12, 1989/Reno, Nevada